

Reconstruction bayésienne en *tomographie d'impédance électrique*

Thierry MARTIN et Jérôme IDIER

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–SUPÉLEC–UPS)

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France.

E-mail: martin@lss.supelec.fr, idier@lss.supelec.fr

Résumé - La tomographie d'impédance électrique (TIÉ) des milieux conducteurs fermés est un problème inverse mal posé. La méthode des éléments finis (MÉF), utilisée pour résoudre le problème direct, préserve la non-linéarité des observations vis-à-vis de la conductivité. Pour la reconstruction, nous introduisons un modèle de douceur *a priori*, markovien, sur la *log-conductivité* recherchée, permettant toutefois la restauration de discontinuités. L'estimateur du *maximum a posteriori* (MAP), obtenu par minimisation de critère pénalisé, apporte une amélioration notable de la résolution.

Abstract - Electrical Impedance Tomography (EIT) of closed conductive media is an ill-posed inverse problem. As regards the corresponding direct problem, the choice of a *Finite Elements Method* preserves the non linear dependence of the observation set upon the conductivity distribution. Our contribution is based on an edge-preserving Markov model as prior for the *log-conductivity* distribution to be estimated. Reconstruction results obtained through the optimization of the posterior likelihood criterion yield significant resolution improvement compared to classical methods.

I INTRODUCTION

La tomographie d'impédance électrique consiste à injecter des courants dans un corps, à recueillir les tensions résultantes sur son pourtour, afin de pouvoir déterminer la distribution de conductivité de l'objet. Nous nous intéressons ici à la reconstruction 2D d'objets fermés, soumis à des courants continus (ou basse fréquence). Notons Ω le domaine en question, $\bar{\Omega}$ son contour, I, V les distributions respectives du flux de courant et du potentiel électrique sur Ω et \bar{I}, \bar{V} leurs restrictions sur $\bar{\Omega}$. Notons enfin σ la distribution de conductivité. Le problème direct correspond alors au calcul de V connaissant \bar{I} et σ , tandis que le problème inverse, que nous cherchons à résoudre, consiste à déterminer σ à partir de \bar{I} et \bar{V} . Les équations de Maxwell permettent de modéliser le problème direct par une équation aux dérivées partielles de type Poisson : $\text{div}(\sigma \text{grad } V) = 0$. Comme il n'existe pas, de solution analytique pour la résoudre, une approximation est nécessaire. De nombreuses méthodes de reconstruction (comme [1]), reposent sur des approximations linéaires du problème direct. Toutefois, celles-ci ont l'inconvénient de n'être valides que pour de faibles contrastes.

II RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT PAR LA MÉF

La méthode des éléments finis est obtenue en discrétisant

la formulation variationnelle du problème :

$$\int_{\Omega} \sigma |\text{grad } V|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma |\text{grad } I|^2 \, d\mathbf{x} - 2 \int_{\bar{\Omega}} V \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{t}} \, ds = 0, \quad (1)$$

ce qui revient à scinder le domaine, disons en P mailles correspondant à N nœuds sur Ω , dont \bar{N} sur la frontière $\bar{\Omega}$. Dès lors, le calcul du problème direct restreint à la frontière, *i.e.* le calcul des tensions observées sur $\bar{\Omega}$ en fonction des courants imposés s'écrit :

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{P} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})^{-1} \mathbf{P}^{\top} \mathbf{D} \bar{\mathbf{i}}, \quad (2)$$

où $\bar{\mathbf{v}}$ et $\bar{\mathbf{i}}$ sont les vecteurs de taille \bar{N} correspondant à la discrétisation de \bar{V} et \bar{I} ; $\boldsymbol{\sigma}$, de taille P , est le vecteur des conductivités. \mathbf{A} est la matrice de « rigidité » du problème, donnée par

$$a_{ij} = \sum_{p \in \varepsilon(i) \cap \varepsilon(j)} \sigma_p \theta(i, j, p), \quad (3)$$

où $\varepsilon(i)$ désigne l'ensemble des mailles adjacentes au nœud i , et $\theta(i, j, p)$ dépend des caractéristiques géométriques du maillage sur le domaine Ω . \mathbf{A} est une matrice creuse, définie positive et de taille $(N-1) \times (N-1)$. \mathbf{P} est un opérateur $\bar{N} \times (N-1)$ de projection sur la frontière et \mathbf{D} est un opérateur de différence, tel que :

$$(\mathbf{D} \bar{\mathbf{i}})_n = \bar{i}_{n+1} - \bar{i}_{n-1} \text{ modulo } \bar{N}, \quad (4)$$

i.e. la différence des flux de courant entre les deux points de la frontière adjacents au point d'indice n . La matrice \mathbf{A} dépend linéairement de $\boldsymbol{\sigma}$; le calcul du problème direct par la MÉF est donc une fonction *non linéaire* de la conductivité, qui converge en $O(r^2)$ (où r est le diamètre d'une maille) vers la solution de (1).

III APPROCHE BAYÉSIENNE DE L'INVERSION

Lors du calcul du problème direct par la MÉF, la donnée de $\bar{\mathbf{i}}$ permet, $\boldsymbol{\sigma}$ étant connu, de déterminer $\bar{\mathbf{v}}$. Ces quantités sont respectivement de taille \bar{N} , P et \bar{N} . En remarquant que $\bar{N} < N < P$, on s'aperçoit que, pour l'inversion, un seul jeu d'observations est insuffisant si l'on tient à avoir au moins autant de relations que d'inconnues indépendantes. L'identifiabilité est alors obtenue à partir de plusieurs jeux de données indépendantes, soit K observations avec $K > P/\bar{N}$. Néanmoins, tout estimateur non régularisé de σ , bien qu'utilisant K observations, s'avère toujours très instable [1, 2]. En introduisant, une loi *a priori* sur l'objet à reconstruire, nous opérons cette régularisation. En 91, ([3]) et en 94 ([4]), l'utilisation de fonctions de

pénalisation quadratiques (d'ordre 0 et 1, correspondant à un modèle *a priori* gaussien sur σ) a permis de stabiliser la solution.

Dans [5], nous proposons une extension des méthodes bayésiennes à l'utilisation de modèles directs non linéaires pour la TIÉ en vue de reconstruction de conductivités fort contrastées, grâce en particulier à l'introduction d'une loi *a priori* sur $\gamma = \log \sigma$. Dans le présent article, nous tirons parti, pour des conductivités peu contrastées, de la robustesse de cette méthode. D'autre part, en gardant un maillage de résolution moyenne pour l'estimation de la conductivité, nous utilisons pour la simulation des observations un maillage haute résolution. Enfin, nous estimons la conductivité à partir de données entâchées de 40 dB en sortie contre 60 dB dans [5].

Considérant une incertitude gaussienne, blanche, centrée et additive sur \bar{v}^k avec $k = 1, \dots, K$, le choix de l'estimateur du *maximum a posteriori* revient [5, 6] à minimiser le critère :

$$J(\gamma) = \sum_{k=1}^K \|\bar{v}^k - \mathbf{P} \mathbf{A}(\exp(\gamma))^{-1} \mathbf{P}^\top \mathbf{D} \bar{v}^k\|^2 + \Phi_{\lambda, T}(\gamma), \quad (5)$$

où le terme de gauche correspond à la vraisemblance des observations et

$$\Phi_{\lambda, T}(\gamma) = \frac{\lambda^2}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{q \in v(p)} h_T(\gamma_p - \gamma_q) \quad (6)$$

est le terme pénalisant provenant de l'*a priori*. Cet *a priori* est markovien [5] et fait intervenir la fonction de Huber,

$$h_T(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } |t| < T \\ 2T(|t| - T) & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui adoucit les transitions entre pixels voisins tout en autorisant l'apparition de discontinuités.

IV RÉSULTATS

Nous reconstruisons ici, avec un maillage de 256 éléments (Fig. 2), un objet conducteur circulaire généré avec $P = 4 \times 256$ mailles (Fig. 1), les observations étant relevées à partir d'une donnée générée sur deux sur $\bar{\Omega}$. Le RSB en sortie sur les potentiels vaut 100 (40 dB). Nous utilisons, pour minimiser $J(\gamma)$ (non convexe) un algorithme de gradient conjugué.

Références

- [1] M. Tasto et H. Schomberg, « Object reconstruction from projections and some non-linear extensions », *Pattern Recognition and Signal Processing* (ed. C. H. Chen), pp. 485–503, 1978.
- [2] R. V. Kohn et A. McKenney, « Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography », *Inverse Problems*, pp. 389–414, 1990.
- [3] P. Hua, E. Woo, J. Webster, et W. Tompkins, « Iterative reconstruction methods using regularization and optimal current patterns in electrical impedance tomography. », *IEEE trans. Med. Imag.*, pp. 621–628, décembre 1991.

- [4] C. Cohen-Bacrie, « Régularisation du problème inverse de tomographie d'impédance électrique », Thèse d'état, École polytechnique de Montréal, décembre 1994.
- [5] T. Martin et J. Idier, « A Bayesian non-linear inverse approach for electrical impedance tomography », in *2nd Intern. Conf. Inverse Problems in Engng.*, Le Croisic, France, juin 1996.
- [6] G. Demoment, « Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structure and problems », *IEEE ASSP*, vol. 37, n° 12, pp. 2024–2036, décembre 1989.

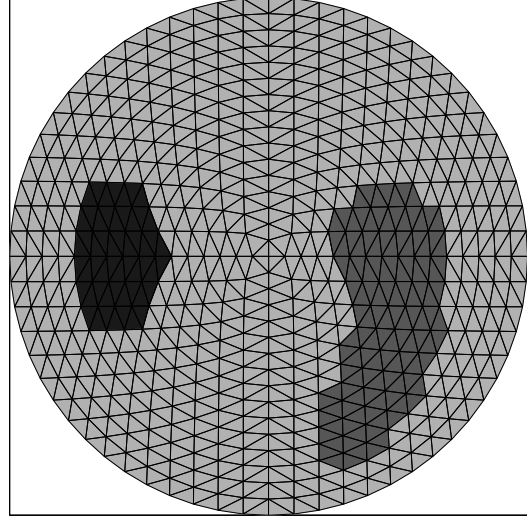


FIG. 1 - Conductivité originale.

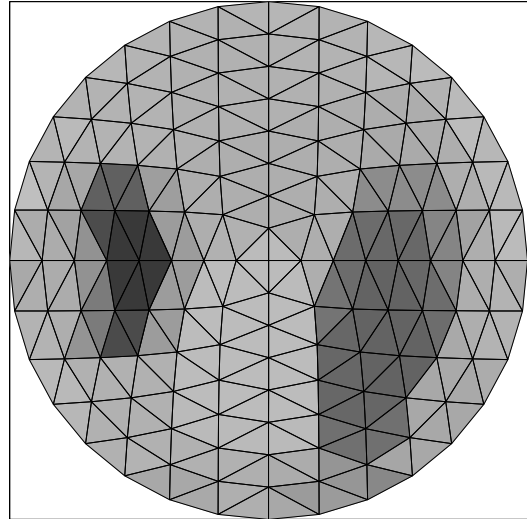


FIG. 2 - Reconstruction avec l'a priori de Huber.

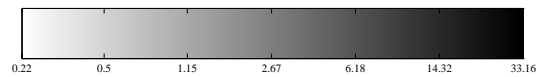


FIG. 3 - Échelle de conductivité.